

127

A

نام:  
نام خانوادگی:  
محل امضا:



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود»  
امام خمینی (ره)

دفتر چه شماره (۱)

صبح جمعه

۱۳۹۴/۱۲/۱۴

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) – سال ۱۳۹۵**

**علوم کامپیوتر (کد ۲۲۰۷)**

مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان دروس اختصاصی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	دروس اختصاصی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها، مبانی نظریه محاسبه، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.  
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها:

۱- همه موارد زیر صحیح‌اند، به‌غیراز:

- (۱) اگر  $P = NP$  باشد آنگاه  $NP = NP\text{-complete}$  خواهد بود.  
 (۲) هر مسئله از کلاس  $NP$  می‌تواند در زمان نمایی حل شود.  
 (۳) مسئله «برای هر  $n = p \times q$  که در آن  $p$  و  $q$  اعداد اول  $k$  بیتی هستند،  $p$  و  $q$  را پیدا کن» یک مسئله از کلاس  $NP$  است.  
 (۴) اگر یک مسئله  $X$  بتواند به یک مسئله شناخته‌شده از کلاس  $NP\text{-Hard}$  کاهش یابد، آنگاه  $X$  باید از کلاس  $NP\text{-Hard}$  باشد.

۲- دو پیمایش  $\text{Preorder} = \{A, B, C, D\}$  و  $\text{Postorder} = \{A, B, C, D\}$  از درختی در دسترس هستند. تعداد درخت‌های پوشش‌دهنده این دو پیمایش چند تا است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۱۴

۳- کدام گزینه در مورد رابطه بازگشتی  $T(n) = T(c_1n) + T(c_2n) + f(n)$  به‌طوری‌که  $f(n)$  یک تابع برحسب  $n$  و همچنین  $c_1, c_2 > 0$ ، درست است؟

- (۱) اگر  $c_1 + c_2 = 1$  در این صورت  $T(n) = O(f(n))$   
 (۲) اگر  $c_1 + c_2 = 1$  در این صورت  $T(n) = O(\log n \times O(f(n)))$   
 (۳) اگر  $c_1 + c_2 < 1$  در این صورت  $T(n) = O(\log n \times O(f(n)))$   
 (۴) اگر  $c_1 + c_2 > 1$  در این صورت  $T(n) = O(f(n))$

۴- مقدار تابع زیر به ازای  $n \geq 1$  چقدر است؟

function  $F_n(n)$

```
{
  if  $n \leq 0$  return ۱;
  else
    return  $F_n(n-1) + 2^n + 4^n$ ;
}
```

- (۱)  $3^n - 2^n$   
 (۲)  $2^n + 4^n$   
 (۳)  $-\frac{7}{3} + \frac{1}{3}4^{n+1} + 2^{n+1}$   
 (۴)  $\frac{7}{3} + \frac{1}{3}4^{n+1} + 2^n$

۵- در یک درخت جستجوی دودویی شامل اعداد  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  در یک برگ قرار گرفته است.

اگر  $x$  اشاره‌گر به گره حاوی  $n$  باشد، مقدار برگشتی  $\text{ancest}(x)$  چیست؟

```
int ancest(node *x){
```

```
node *p = x->parent;
```

```
while(p != NULL && x == p->right){
```

```
  x = p;
```

```
  p = x->parent;
```

```
}
```

```
return p->value;
```

```
}
```

(۱) ۱

(۲)  $n-1$

(۳)  $n+1$

(۴)  $2n$

- ۶- تعداد درخت‌های جستجوی دودویی با  $n$  ( $n \geq 2$ ) کلید متمایز، توسط کدام یک از روابط بازگشتی زیر می‌توانند تولید شوند؟

$$C_n = \frac{4n-1}{n+1} C_{n-1} \quad (۱) \quad C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \quad (۲)$$

$$C_n = \frac{5n-3}{n+1} C_{n-1} \quad (۳) \quad C_n = \frac{4n-2}{n-1} C_{n-1} \quad (۴)$$

- ۷- اگر  $F_n$ ،  $n$  امین عدد فیبونیچی ( $F_1 = 1, F_0 = 0$ ) و  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  باشد و  $G_h$  کمینه تعداد گره‌های یک درخت  $Avl$  با ارتفاع  $h$  باشد ( $G_1 = 2, G_0 = 1$ ) آنگاه:

$$G_h = F_{h+2} - 1 \quad (۱) \quad G_h = F_{h-1} + 1 \quad (۲)$$

$$G_h = F_{h+2} + 1 \quad (۳) \quad G_h = F_{h-1} + 3 \quad (۴)$$

- ۸- آرایه‌ای با ۸ عنصر را با quicksort می‌خواهیم مرتب کنیم. بعد از اولین تکرار، داده‌ها به صورت زیر درآمده است. کدام داده pivot بوده است؟

۲, ۵, ۱, ۷, ۹, ۱۲, ۱۱, ۱۰

(۱) ۷ یا ۹ (۲) می‌تواند ۷ باشد ولی نمی‌تواند ۹ باشد.

(۳) نمی‌تواند ۷ باشد ولی می‌تواند ۹ باشد. (۴) نه ۷ و نه ۹

- ۹- مجموعه  $S$  با  $n \geq 2$  از اعداد نامرتب و متمایز را در نظر بگیرید. می‌خواهیم دو عدد  $x$  و  $y$  در  $S$  را طوری بیابیم که

$|x - y| \leq \frac{1}{n-1} (\max(S) - \min(S))$  باشد. بهترین الگوریتم برای یافتن  $x$  و  $y$  در  $S$  دارای چه هزینه زمانی خواهد بود؟

$$O(n \log n) \quad (۱) \quad O(\log n) \quad (۲)$$

$$O(n^2) \quad (۳) \quad O(n) \quad (۴)$$

- ۱۰- در گراف وزن‌دار فاصله دو رأس به صورت طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس تعریف می‌شود. قطر گراف نیز برابر بیشترین فاصله بین جفت رأس‌های گراف تعریف می‌شود. بهترین الگوریتم برای یافتن قطر یک درخت ریشه‌دار با  $n$  گره، دارای چه مرتبه زمانی است؟

$$O(n \log n) \quad (۱) \quad O(\log n^2) \quad (۲)$$

$$O(n^2) \quad (۳) \quad O(n) \quad (۴)$$

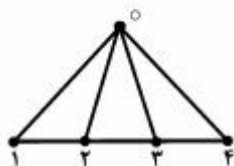
- ۱۱- گراف Fan زیر را برای  $n = 4$  در نظر بگیرید. به طور کلی گراف Fan همواره دارای  $n+1$  گره و ساختاری مشابه شکل زیر دارد. اگر  $t_n$  تعداد درخت‌های پوشای (Spanning) گراف Fan با  $n+1$  گره باشد، و  $t_0 = 1$  در این صورت کدام یک از روابط زیر برای  $n \geq 1$  صادق است؟

$$t_{n+1} = 2t_n + 1 \quad (۱)$$

$$t_{n+1} = 2t_n + 2 \quad (۲)$$

$$t_{n+1} = t_n + \sum_{i=0}^n t_i \quad (۳)$$

$$t_{n+1} = t_n + 2 \sum_{i=0}^n t_i \quad (۴)$$



۱۲- تعداد درختان پوشا (spanning) برای یک گراف با  $2n$  رأس که از اتصال دو گراف کامل  $(K_n)$  با یک یال به دست می‌آید چقدر است؟

$$(1) \quad n^{n-4} \quad (2) \quad n^{2n-4}$$

$$(3) \quad 2n^{n-2} \quad (4) \quad 2n^{2n-2}$$

۱۳- حداقل و حداکثر طول کد یک عنصر در فشرده‌سازی  $n$  عنصر با روش هافمن چقدر می‌توانند باشند؟

$$(1) \quad \log_2 n, n-1 \quad (2) \quad \log_2 n, n-2$$

$$(3) \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n-1 \quad (4) \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n-2$$

۱۴- مسئله حاصل ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها را در نظر بگیرید:

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

آیا الگوریتم حریصانه زیر منجر به یافتن ترتیب بهینه (از نظر تعداد ضرب‌ها) برای مسئله می‌شود؟  
الگوریتم - در هر مرحله ماتریس‌هایی که مجاورند و بُعد مشترک آن‌ها از بُعد مشترک هر دو ماتریس مجاور دیگر بیشتر باشد، در هم ضرب می‌شوند و این کار تا رسیدن به ماتریس  $M$  ادامه می‌یابد.

(۱) بلی - همیشه منجر به جواب بهینه می‌شود.

(۲) خیر - گاهی اوقات منجر به جواب بهینه نمی‌شود.

(۳) خیر - الگوریتم داده‌شده هیچ‌وقت جواب بهینه را تولید نمی‌کند.

(۴) بلی - برای  $n$  های کوچک منجر به جواب بهینه می‌شود.

۱۵- فرض کنید برای هر عدد صحیح نامنفی  $k$ ، ماتریس  $H_k$  به ابعاد  $2^k \times 2^k$  به صورت زیر تعریف شود:

می‌خواهیم بردار  $V$  با  $n$  عنصر ( $n = 2^k$ ) را به صورت  $H_k \times V$  ضرب کنیم. بهترین الگوریتم برای انجام این کار

دارای چه مرتبه زمانی خواهد بود؟

$$\begin{cases} H_0 = [1] \\ H_k = \begin{bmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{bmatrix}, \quad k > 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad O(n)$$

$$(2) \quad O(n^2)$$

$$(3) \quad O(\log_2 n)$$

$$(4) \quad O(n \log_2 n)$$

مبانی نظریه محاسبه:

۱۶- کدام گزینه در مورد مسئله دلخواه  $P$  صحیح نیست؟

(۱) همواره می‌توان مسئله  $P$  را به صورت یک تابع بیان کرد.

(۲) حداقل توان محاسباتی برای حل تمام نمونه‌های مسئله  $P$  یکسان است.

(۳) هر نمونه از مسئله  $P$  را می‌توان به یک نمونه از مسئله دیگر  $P'$  تبدیل کرد که حل  $P'$  سخت‌تر از  $P$  نیست.

(۴) همواره می‌توان مسئله جواب داشتن هر نمونه از مسئله  $P$  را به عنوان مقدار یک تابع با خروجی بله / خیر بیان کرد.

۱۷- زبان دلخواه  $L$  بر روی الفبای  $A$  مفروض است. در چه صورتی زبان دیگری مانند  $L'$  بر روی الفبای  $B$  وجود دارد که یک تناظر یک‌به‌یک بین اعضای  $L$  و  $L'$  وجود داشته باشد؟

(۱) فقط در صورتی که اندازه  $B$  و  $A$  مساوی باشند.

(۲) فقط در صورتی که  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد.

(۳) کافی است  $B$  شامل حداقل یک حرف باشد.

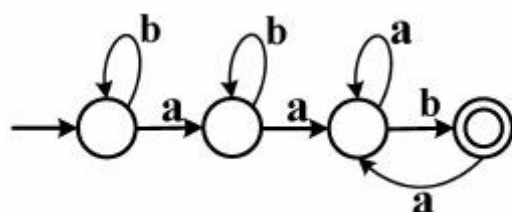
(۴) فقط در صورتی که  $B$  شامل حداقل دو حرف باشد.

۱۸- اتوماتون متناهی قطعی  $M$  با مجموعه حالات  $Q_M$  و زبان  $L_M$  مفروض است. برای هر دو حالت  $p, q \in Q_M$ ،  $L_{pq}$  برابر با مجموعه کلماتی است که برای هر کدام از این کلمات با شروع از حالت  $p$  و پس از مصرف آن کلمه در  $M$  به حالت  $q$  می‌رسیم. کدام گزینه صحیح است؟

$$\forall M, \forall p, q \in Q_M \mid L_{pq} \subseteq L_M \quad (۲) \quad \exists M \mid \bigcup_{p, q \in Q_M} L_{pq} \subseteq L_M \quad (۱)$$

$$\forall M, L_M = \bigcup_{p, q \in Q_M} L_{pq} \quad (۴) \quad \forall M, \exists p, q \in Q_M \mid L_{pq} = L_M \quad (۳)$$

۱۹- عبارت منظم متناظر با اتوماتون متناهی قطعی زیر کدام است؟



$$(a+b)^* ab^* ab \quad (۱)$$

$$b^* ab^* aa^* b \quad (۲)$$

$$b^* ab^* aa^* b(a^* b) \quad (۳)$$

$$b^* ab^* aa^* b(ab)^* \quad (۴)$$

۲۰- در گرامر  $G$  با الفبای  $A$  و متغیرهای  $V$  هر قاعده  $\alpha \rightarrow \beta$  به صورت  $\alpha \in V, \beta \in AU(V^*)$  است. کدام گزینه در مورد گرامر  $G$  صحیح است؟

(۱)  $G$  منظم است.

(۲)  $G$  مستقل از متن است ولی الزاماً منظم نیست.

(۳)  $G$  الزاماً حساس به متن نیست.

(۴)  $G$  حساس به متن است ولی الزاماً مستقل از متن نیست.

۲۱- دو گرامر مستقل از متن و نامبهم  $G_1$  و  $G_2$  با متغیرهای شروع  $S_1$  و  $S_2$  مفروض است. گرامر  $G_3$  را از اجتماع دو گرامر  $G_1$  و  $G_2$  با متغیر شروع  $S_3$  و با افزودن دو قاعده  $S_3 \rightarrow S_1$  و  $S_3 \rightarrow S_2$  می‌سازیم. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) زبان گرامر  $G_3$  ذاتاً مبهم است.

(۲) زبان گرامر  $G_3$  ذاتاً مبهم نیست ولی گرامر  $G_3$  مبهم است.

(۳) گرامر  $G_3$  و در نتیجه زبان گرامر  $G_3$  مبهم نیست.

(۴) مسئله تعیین مبهم بودن زبان گرامر  $G_3$  تصمیم‌ناپذیر است.

۲۲- در گرامر  $G$  که تعداد متغیرهای آن  $n$  و در شکل نرمال چامسکی است کلمه  $w$  با طول  $L$  با به کارگیری  $m$  قاعده ساخته شده است. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) در صورتی که  $m > n$  آنگاه زبان گرامر  $G$  نامتناهی خواهد بود.
  - (۲) در صورتی که  $L > n$  آنگاه زبان گرامر  $G$  نامتناهی خواهد بود.
  - (۳) در صورتی که  $L > n$  و  $m > n$  آنگاه زبان گرامر  $G$  نامتناهی خواهد بود.
  - (۴) این اطلاعات در مورد تعیین نامتناهی بودن زبان گرامر  $G$  کافی نیست.
- ۲۳- در مورد زبان حالت پایانی یک اتوماتون پشته‌ای کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) اگر بیشترین اندازه پشته مصرفی هنگام محاسبه هر کلمه کمتر از طول آن کلمه باشد آنگاه زبان این اتوماتون منظم است.
- (۲) اگر بیشترین اندازه پشته مصرفی هنگام محاسبه هر کلمه کمتر از طول آن کلمه باشد آنگاه این اتوماتون قطعی است.
- (۳) اگر محاسبه هر کلمه بدون برداشتن از پشته انجام شود، آنگاه زبان این اتوماتون منظم است.
- (۴) حداکثر اندازه پشته مصرفی هنگام محاسبه هر کلمه همواره تابعی از طول آن کلمه است.

۲۴- در یک اتوماتون پشته‌ای غیرقطعی که تعداد حالات آن  $n$  و تعداد حروف الفبای آن  $m$  است در هر وضعیت با مشاهده حداکثر  $k$  حرف ابتدای بخش باقی‌مانده ورودی، تنها گذار ممکن به صورت یکتا مشخص می‌شود. کدام گزینه در مورد تبدیل این اتوماتون به یک اتوماتون پشته‌ای قطعی صحیح است؟

- (۱) این اتوماتون را لزوماً نمی‌توان به یک اتوماتون پشته‌ای قطعی تبدیل کرد.
- (۲) می‌توان یک اتوماتون پشته‌ای قطعی معادل برای آن با حداکثر  $n + k + m$  حالت ساخت.
- (۳) می‌توان یک اتوماتون پشته‌ای قطعی معادل برای آن با حداکثر  $n \times k \times m$  حالت ساخت ولی با  $n + k + m$  حالت لزوماً چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.
- (۴) می‌توان یک اتوماتون پشته‌ای قطعی معادل برای آن با حداکثر  $n \times m^k$  حالت ساخت ولی با  $n \times k \times m$  حالت لزوماً چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

۲۵- کدام کلمه توسط گرامر زیر با متغیر شروع  $S$  تولید می‌شود؟

$S \rightarrow abS \mid A$   
 $bA \rightarrow Aa$   
 $aA \rightarrow AC$   
 $aC \rightarrow Ca$   
 $AC \rightarrow bD$   
 $DC \rightarrow bD \mid b$

- (۱) abababab
- (۲) abbaabba
- (۳) aaaabbbb
- (۴) ababbbba

- ۲۶- در مورد زبان حالت پذیرش ماشین تورینگ  $M$  که محتوای نوار آن غیرقابل تغییر است کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱) زبان  $M$  همواره منظم است.  
 (۲) فقط در صورتی که  $M$  قطعی باشد زبان  $M$  منظم است.  
 (۳) زبان  $M$  همواره مستقل از متن است ولی لزوماً منظم نیست.  
 (۴) زبان  $M$  لزوماً مستقل از متن نیست.
- ۲۷- برای زبان دلخواه  $L \subseteq A^*$  تابع جزئی  $P_L : A^* \rightarrow \{1\}$  بدین ترتیب تعریف شده است که  $P_L(x) = 1$  اگر و تنها اگر  $x \in L$ . کدام گزینه در مورد تابع  $P_L$  صحیح است؟  
 (۱) تابع  $P_L$  خوش تعریف نیست.  
 (۲) تابع  $P_L$  را همواره می‌توان با یک ماشین تورینگ محاسبه کرد.  
 (۳) تابع  $P_L$  را فقط در صورتی می‌توان محاسبه کرد که  $L$  شمارش پذیر بازگشتی باشد.  
 (۴) تابع  $P_L$  را فقط در صورتی می‌توان محاسبه کرد که  $L$  بازگشتی باشد.
- ۲۸- کدام یک از مسائل زیر در مورد ماشین تورینگ دلخواه  $M$  هنگام محاسبه روی ورودی دلخواه  $w$  تصمیم پذیر است؟  
 (۱) آیا  $M$  حرفی غیر از Blank روی نوار خود می‌نویسد.  
 (۲) آیا  $M$  حرف خاص  $a$  را روی نوار خود می‌نویسد.  
 (۳) آیا  $M$  در وضعیت پذیرش متوقف می‌شود.  
 (۴) آیا  $M$  متوقف می‌شود.
- ۲۹- زبان  $L_1$  توسط ماشین تورینگ  $M$  با مجموعه حالات  $Q$  پذیرفته می‌شود. ماشین تورینگ جدید  $M'$  برای هر ورودی  $w$  رفتار ماشین  $M$  را شبیه‌سازی کرده و دنباله تغییر حالات  $M$  را بر روی نوار دوم خود ثبت می‌کند. کدام گزینه در مورد زبان  $L$  که به صورت زیر تعریف شده است، صحیح است؟  

$$L = \{x \in Q^* \mid (\exists w \in L_1 \mid \text{هنگام پردازش } w \text{ است})\}$$
  
 (۱)  $L$  منظم است.  
 (۲)  $L$  تصمیم پذیر است ولی لزوماً منظم نیست.  
 (۳)  $L$  شمارش پذیر بازگشتی نیست.  
 (۴)  $L$  شمارش پذیر بازگشتی است ولی تصمیم پذیر نیست.
- ۳۰- کدام گزینه در مورد توابع بازگشتی (Recursive)، بازگشتی اولیه (Primitive Recursive) و بازگشتی جزئی (Partial Recursive) صحیح است؟  
 (۱) هر تابع بازگشتی، بازگشتی جزئی است.  
 (۲) هر تابع بازگشتی، بازگشتی اولیه است.  
 (۳) هر تابع بازگشتی جزئی، بازگشتی اولیه است.  
 (۴) هر تابع دلخواه یا بازگشتی یا بازگشتی اولیه یا بازگشتی جزئی است.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۳۱- پوچی ماتریس مقابل کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۳۲- فرض کنید  $U$  و  $W$  دو زیر فضای متمایز با بعد ۴ از فضای برداری  $V$  با بعد ۶ باشند. آنگاه بعد  $U \cap W$  کدام است؟

(۱) ۱ یا ۲

(۲) ۲ یا ۳

(۳) ۳ یا ۴

(۴) ۱ یا ۲ یا ۳

۳۳- اگر  $V = M_r(\mathbb{R}) \times M_r(\mathbb{R})$  آنگاه  $\dim_{\mathbb{R}} V$  کدام گزینه است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۱۳

(۴) ۳۶

۳۴- درجه چند جمله‌ای مینیمال  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳۵- تحت چه شرطی بردار  $(-1, 2, 0, 5)$  در فضای تولیدشده توسط بردارهای  $(1, 1, -3, 2)$ ،  $(1, 0, 1, 1)$ ،  $(-1, 0, 1, 1)$ ،

$(1, -1, b, -1)$  قرار دارد؟

(۱)  $b \neq 1$

(۲)  $b \neq 3$

(۳)  $b = 2$

(۴) به ازای هیچ مقدار  $b$



۳۶- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  وارون‌پذیر روی میدان  $\mathbb{C}$  باشد به‌طوری‌که  $\det A = 1$  و  $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{-1}) = 0$ .  
آنگاه داریم:

$$A^T = I \quad (1)$$

$$A^4 = I \quad (2)$$

$$A + A^{-1} = I \quad (3)$$

$$A^T = I \quad (4)$$

۳۷- اگر  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان  $\mathbb{C}$  باشد و  $T: V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی روی  $V$  باشد، بعد زیر فضای  $\ker T \cap T(V)$  کدام است؟

$$\dim T(V) - \dim T^T(V) \quad (1)$$

$$\dim T^T(V) \quad (2)$$

$$\dim T(V) - \dim T^T(V) \quad (3)$$

$$\dim T(V) - \dim T^T(V) - \dim T^T(V) \quad (4)$$

۳۸- فرض کنید  $P_n(\mathbb{R})$  مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر  $n$  باشد که ضرایب آن‌ها اعدادی حقیقی‌اند. فرض

$$\text{کنید: } T: P_T(\mathbb{R}) \rightarrow P_T(\mathbb{R}) \text{ که } T(f(x)) = 2f'(x) + 3 \int_0^x f(t) dt$$

در این صورت رتبه  $T$  کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۳۹- ماتریس بلوکی  $A = \begin{bmatrix} I & B \\ O & B \end{bmatrix}$ ، که در آن  $B$  ماتریسی  $3 \times 3$  است که تمام درآیه‌های آن ۱ هستند، را در نظر

$$\text{بگیرید. اگر } A^4 = \begin{bmatrix} I & C \\ O & B^4 \end{bmatrix} \text{، آنگاه } C \text{ برابر است با:}$$

$$4 \circ B \quad (1)$$

$$8 \circ B \quad (2)$$

$$242B \quad (3)$$

$$121B \quad (4)$$

۴۰- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $3 \times 3$  و ناصفری باشند و  $AB + BA = 0$ ، کدام یک از احکام زیر درست است؟

$$A^T = 0 \quad (1)$$

$$A \text{ وارون‌پذیر است.} \quad (2)$$

$$\operatorname{tr} A = 0 \quad (3)$$

$$AB \text{ وارون‌پذیر نیست.} \quad (4)$$

۴۱- فرض کنید  $A$  ماتریسی است که  $A^2 = 2I$ ، در این صورت کدام یک از ماتریس‌های زیر ممکن است وارون‌پذیر نباشد؟

(۱)  $A - I$

(۲)  $A + 2I$

(۳)  $A^2 - 2A + 2I$

(۴)  $A^2 - \sqrt{2}A$

۴۲- بعد فضای تولیدشده توسط بردارهای ویژه ماتریس روبه‌رو کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۴۳- فرض کنید  $A$  یک ماتریس حقیقی  $7 \times 7$  باشد و  $A^3 = 5A^2 - 6A$ ، اگر  $\text{tr}(A) = 8$  آنگاه رتبهٔ  $A$  برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۴۴- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $8 \times 8$  باشد که عناصر روی قطر آن ۱ است و بقیه درایه‌های آن ۱ هستند. در این صورت مجموع درایه‌های وارون  $A$  برابر است با:

(۱)  $-\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۳)  $-\frac{4}{3}$

(۴)  $\frac{4}{3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1394 & 1 & \sqrt{2} & -4 \\ 4 & 1395 & 9 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{7} & 3 & 1396 & 96 \\ 13 & 97 & \sqrt{3} & 1397 \end{pmatrix} \quad \text{فرض ۴۵}$$

در این صورت داریم:

- (۱)  $A$  وارون‌ناپذیر و ۱ مقدار ویژه آن می‌باشد.
- (۲)  $A$  وارون‌پذیر است و ۱ مقدار ویژه آن می‌باشد.
- (۳)  $A$  وارون‌ناپذیر است و ۱ مقدار ویژه آن نمی‌باشد.
- (۴)  $A$  وارون‌پذیر است و ۱ مقدار ویژه آن نمی‌باشد.

